



CENTRE DE RENNES
IRISA

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
BP 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (3) 954 90 20

Rapports de Recherche

N° 261

DISTRIBUTION DES INTERENTRÉES ET INTERSORTIES POUR DES RÉSEAUX À FORME PRODUIT

Jean-Yves LE BOUDEC

Décembre 1983

Campus Universitaire de Beaulieu
Avenue du Général Leclerc
35042 - RENNES CÉDEX
FRANCE
Tél. : (99) 36.20.00
Télex : UNIRISA 95 0473 F

DISTRIBUTION DES INTERENTREES ET INTERSORTIES
POUR DES RESEAUX A FORME PRODUIT

J.Y. LE BOUDEC

Publication Interne n° 214
Novembre 1983
39 pages

RESUME

On démontre que dans un réseau de Jackson, les distributions des interentrées et intersorties ne sont pas, en général, égales. L'égalité a lieu, 1) si le taux de service de la station considérée est constant, ou 2) si la condition $e_i q_{ij} = e_j q_{ji}$, portant sur les routages et le taux des arrivées, est vérifiée. On étend ce dernier résultat aux réseaux classiques à forme produit, avec ou sans limitation de capacité.

ABSTRACT

It is shown that, in a general Jackson network of queues, the distributions of interinput and interoutput times are not equal. Equality holds if, 1) the service rate in the studied station is constant or 2) the following condition : $e_i q_{ij} = e_j q_{ji}$ is satisfied. The latter result is extended to classical product-form networks, with or without blocking.

INTRODUCTION

A - RESEAUX DE JACKSON

0 Notations

1 Interentrées et intersorties

- 1.1 Probabilités stationnaires aux instants d'entrée/sortie
- 1.2 Equations de renouvellement
- 1.3 Délai jusqu'à la prochaine entrée - temps moyen d'interentrée
- 1.4 Période d'inoccupation de la file

2 Cas où le taux de service de la station 1 est constant

- 2.1 Distribution des interentrées et d'intersorties
- 2.2 Flux d'entrée - flux de sortie

3 Cas où les taux de service dépendant de l'état de la file

- 3.1 Contre-exemple : cas ouvert
- 3.2 Contre-exemple : cas fermé

B - RESEAUX A FORME PRODUIT REVERSIBLES

1 Réseaux classiques à forme produit

2 Réversibilité

- 2.1 Définition
- 2.2 Condition de réversibilité
- 2.3 Remarques

3 Interentrées et intersorties

CONCLUSION

APPENDICE 1 Chaîne de Markov incluse

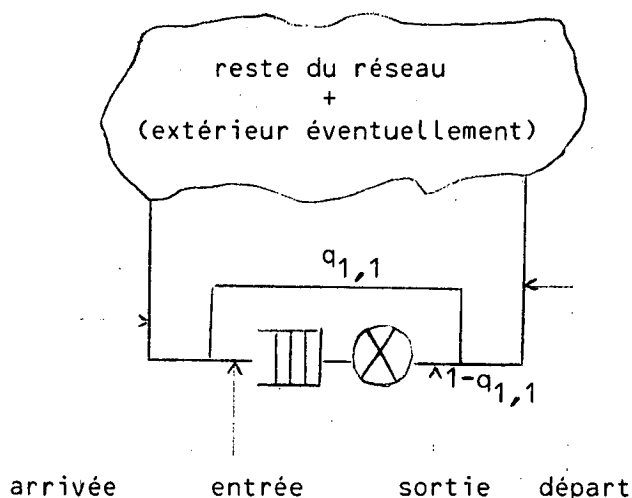
APPENDICE 2 Détail des calculs du contre-exemple 3.1



PAPIER RECUPERÉ ET RECYCLÉ

INTRODUCTION

Dans un réseau de files d'attente, fermé ou ouvert, nous appelons arrivée en station 1, une arrivée d'une station autre que la station 1, ou de l'extérieur. Une entrée est une arrivée de l'extérieur, ou d'une station quelconque. Nous avons des définitions analogues pour les départs et les sorties :



Nous étudierons les distributions des intervalles de temps entre deux entrées (interentrées), entre deux sorties (intersorties). Nous évoquerons aussi les flux d'entrée, sortie,

En l'absence de rebouclage les entrées sont égales aux arrivées ; si on désire étudier les arrivées à une file avec rebouclage, il suffit d'éliminer le rebouclage en multipliant μ_1 par $q_{1,1}$ ($w_{1,r}$ par $q_{1,1}^r$ dans les réseaux multiclassés), et d'étudier les entrées à cette file fictive.

Dans la partie A nous nous intéressons aux réseaux de Jackson, et dans la partie B aux réseaux dits "classiques à forme produit", multiclassés, avec ou sans limitation de capacité.

Nous verrons que les interentrées et intersorties n'ont, en général, pas même distribution, même dans le cas d'un réseau de Jackson sans rebouclage. Il est précisé des conditions suffisantes pour l'égalité des distributions.

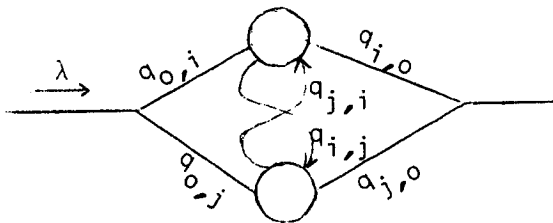
A - RESEAUX DE JACKSON

0 Notations

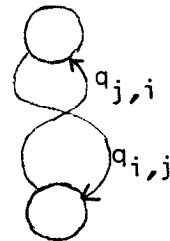
Considérons un réseau de Jackson comportant n stations. Il y a k_i clients en station i , et $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$. Si le réseau est fermé, le nombre total de clients est fixé dans toute la suite à N .

Les routages $q_{i,j}$ et les taux λ, μ_i sont donnés par le dessin ci-dessous

réseau ouvert



réseau fermé



Le taux des arrivées λ est constant.

Probabilités stationnaires ; posons $g_i(k_i) = \frac{e_i^{k_i}}{\mu_i(1) \dots \mu_i(k_i)}$; on a :

* cas ouvert $P(\vec{k}) = K g_1(k_1) \dots g_n(k_n)$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la solution de :

$$e_i = \lambda a_{0,i} + \sum_{j=1}^n e_j q_{j,i} \quad \text{si } k_i < 0 \text{ pour un } i, \text{ alors } P(\vec{k}) = 0$$

* cas fermé $P(\vec{k}) = K g_1(k_1) \dots g_n(k_n)$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une solution non nulle de :

$$e_i = \sum_{j=1}^n e_j q_{j,i}$$

on pourra avoir à considérer des réseaux fermés fictifs contenant M clients ; on pose alors :

$$P_M(\vec{k}) = K_M g_1(k_1) \dots g_n(k_n), \text{ ainsi } P_N = P \text{ et } K_N = K ;$$

par convention, si $k_1 + \dots + k_n > M$, alors $P_M(\vec{k}) = 0$.

De même si $k_i < 0$ pour un i , alors $P_M(\vec{k}) = 0$.

* P représente aussi la matrice ligne de terme général $P(\vec{k})$.

On note E l'ensemble des états possibles. Dans le cas fermé, on note E_M l'ensemble de états possibles s'il y avait M clients ; ainsi $E = E_N$. Dans le cas ouvert, $E = \mathbb{N}^n$.

Enfin E_M^i (resp. E^i) est l'ensemble des états de E_M (resp. E) pour lesquels la station i est vide.

1 Interentrées et intersorties

1.1 Probabilité stationnaire aux instants d'entrée/sortie

Considérons tout d'abord le cas ouvert, soit $P^a(\vec{k})$ la probabilité que le réseau soit dans l'état \vec{k} juste après une entrée dans la file 1, $P^b(\vec{k})$ juste après une sortie. En utilisant l'appendice, on obtient :

$$(1) \quad p^a = \eta PC \quad \text{avec } \eta = \eta' = \frac{1}{e_1}$$

$$(2) \quad p^b = \eta' PC'$$

où C est la matrice des transitions "entrée" et C' des transitions sorties : $C(\vec{k}, \vec{l}) = C'(\vec{k}, \vec{l}) = 0$ sauf :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(\vec{k}, \vec{k}_{i-,1+}) = \mu_i(k_i) q_{i,1} \quad \text{et} \quad C(\vec{k}, \vec{k}_{1+}) = \lambda q_{0,1} \\ C'(\vec{k}, \vec{k}_{1-,i+}) = \mu_1(k_1) q_{1,i} \quad \text{et} \quad C'(\vec{k}, \vec{k}_{1-}) = \mu_1(k_1) q_{1,0} \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} C(\vec{k}, \vec{k}_{i-,1+}) = \mu_i(k_i) q_{i,1} \quad \text{et} \quad C(\vec{k}, \vec{k}_{1+}) = \lambda q_{0,1} \\ C'(\vec{k}, \vec{k}_{1-,i+}) = \mu_1(k_1) q_{1,i} \quad \text{et} \quad C'(\vec{k}, \vec{k}_{1-}) = \mu_1(k_1) q_{1,0} \end{array} \right.$$

on peut écrire aussi :

$$(5) \quad P^a(\vec{k}) = P(\vec{k}_{1-})$$

$$(6) \quad P^b(\vec{k}) = P(\vec{k}) q_{1,0} + \sum_{i=1}^n P(\vec{k}_{i-}) q_{1,i}$$

Dans le cas fermé, on obtient : (N est fixé une fois pour toutes)

$$(7) \quad p^a = \eta PC \quad \text{avec } \eta = \eta' = \frac{K_{N-1}}{K_N e_1}$$

$$(8) \quad p^b = \eta' PC'$$

avec C et C' fixés comme en (3), (4), (où $q_{0,1} = q_{1,0} = 0$)

On peut aussi écrire :

$$(9) \quad P^a(\vec{k}) = P_{N-1}(\vec{k}_{1-})$$

$$(10) \quad P^b(\vec{k}) = \sum_{i=1}^n q_{1,i} P_{N-1}(\vec{k}_{i-})$$

1.2 Equations de renouvellement

Soit $\alpha_{\vec{k}}$ la transformée de Laplace-Stieltjes (T.L.S.) du délai jusqu'à la prochaine entrée sachant que le réseau est dans l'état \vec{k} . De même $\beta_{\vec{k}}$ pour les sorties.

Les équations de renouvellement, obtenues en conditionnant par rapport à la prochaine transition, s'écrivent, dans le cas ouvert [Labetoulle, Pujolle et Soula].

$$(11) \quad \alpha_{\vec{k}}(s) \left(\lambda + \sum_{i=1}^n \mu_i(k_i) + s \right) = \lambda q_{0,1} + \sum_{i=1}^n \mu_i(k_i) q_{i,1} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^n \mu_i(k_i) q_{i,j} \alpha_{\vec{k}_{i-,j+}}(s) \\ + \sum_{j=2}^n \lambda q_{0,j} \alpha_{\vec{k}_{j+}}(s) + \sum_{i=1}^n \mu_i(k_i) q_{i,0} \alpha_{\vec{k}_{i-}}(s)$$

$$(12) \quad \beta_{\vec{k}}(s) \left(\lambda + \sum_{i=1}^n \mu_i(k_i) + s \right) = \mu_1(k_1) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^n \mu_i(k_i) q_{i,j} \beta_{\vec{k}_{i-,j+}}(s) + \lambda \sum_{j=1}^n q_{0,j} \alpha_{\vec{k}_{j+}}(s) \\ + \sum_{i=2}^n \mu_i(k_i) q_{i,0} \beta_{\vec{k}_{i-}}(s)$$

Dans le cas fermé, les termes contenant λ ou $q_{i,0}$ disparaissent.

Ces équations peuvent s'écrire matriciellement ; dans les deux cas on a :

$$(13) \quad (D+sI)\alpha = CJ + (A-C)\alpha$$

$$(14) \quad (D+sI)\beta = C'J + (A-C')\beta$$

avec les notations suivantes :

- A est la matrice dont le terme général est nul à l'exception de :

$$A(\vec{k}, \vec{k}_{i-,j+}) = \mu_i(k_i) q_{i,j} \quad , \quad A(\vec{k}, \vec{k}) = \sum_{i=1}^n \mu_i(k_i) q_{i,i}$$

ainsi que, dans le cas ouvert :

$$A(\vec{k}, \vec{k}_{j,+}) = \lambda q_{0,j} \quad A(\vec{k}, \vec{k}_{i,-}) = \mu_i(k_i) q_{i,0}$$

(matrice des transitions)

- D est la matrice diagonale telle que : $D(\vec{k}, \vec{k}) = \lambda + \sum_{i=1}^n \mu_i(k_i)$

- C et C' sont définis en 1.1

- α est la matrice colonne $\alpha_{\vec{k}}$

- I est la matrice identité

- J est la matrice colonne de terme général égal à 1.

(15) On note $\hat{a}(s)$ la T.L.S. du temps entre deux entrées :

$$\hat{a}(s) = \sum_{\vec{k} \in E} P^a(\vec{k}) \alpha_{\vec{k}}(s) = P^a \alpha(s)$$

(16) de même pour les sorties : $\hat{b}(s) = \sum_{\vec{k} \in E} P^b(\vec{k}) = P^b \beta(s)$.

1.3 Délai jusqu'à la prochaine entrée-temps moyen d'interentrée

Soit $\hat{A}(s)$ la T.L.S. du délai jusqu'à la prochaine entrée, en régime stationnaire. On a donc :

$$(17) \quad \hat{A}(s) = \sum_{\vec{k} \in E} P(\vec{k}) \alpha_{\vec{k}}(s) = P \alpha(s)$$

Il existe une relation simple entre \hat{A} et \hat{a} :

en multipliant (13) à gauche par P, il vient :

$$P(D+sI)\alpha = PCJ + P(A-C)\alpha$$

or $PD = PA$ et $PC = \frac{1}{\eta} P^a$, avec $\eta^{-1} = PCJ$; d'où :

$$s P \alpha = \eta^{-1} (1 - P^a) \alpha$$

soit :

$$(18) \quad \boxed{\hat{A}(s) = \frac{1}{\eta} \frac{1 - \hat{a}(s)}{s}} \quad \text{avec (rappel)} \quad \begin{cases} \text{cas ouvert : } \frac{1}{\eta} = e_1 \\ \text{cas fermé : } \frac{1}{\eta} = \frac{e_1 K_N}{K_{N-1}} \end{cases}$$

Cette relation sera utilisée dans le paragraphe 2.1. Elle donne aussi, en faisant tendre s vers 0, la valeur moyenne du temps d'interentrées :

$$(19) \quad E(\text{temps d'interentrées}) = \eta$$

de façon analogue on obtient $\hat{B}(s) = \frac{1}{\eta} \frac{1-\hat{b}(s)}{s}$ et on peut retrouver que le temps moyen d'intersorties est égal au temps moyen d'interentrées.

1.4 Période d'inoccupation de la file

Une relation analogue à (18) existe entre les T.L.S. de la période d'inoccupation de la file, et du délai jusqu'à la prochaine entrée sachant que la file est vide.

Soient respectivement \hat{c} et \hat{a}_0 ces deux fonctions. On a :

$$(20) \quad \hat{c}(s) = \frac{1}{P^b(E^1)} \sum_{\vec{k} \in E} P^b(\vec{k}) \alpha_{\vec{k}}(s)$$

et

$$(21) \quad \hat{a}_0(s) = \frac{1}{P(E^1)} \sum_{\vec{k} \in E} P(\vec{k}) \alpha_{\vec{k}}(s)$$

Décomposons les matrices $A, C, C', D, P, \alpha, J$ suivant la partition $(E-E_1; E_1)$ de E :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_3 \\ \hline A_2 & A_4 \end{array} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{file 1 occupée} \\ \text{file 1 vide} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{file} \\ \text{occupée} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{file 1} \\ \text{vide} \end{array}$$

$$D = \left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array} \right) \quad P = (P_1 \ P_2) \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

Une entrée en station 1 aboutit à un état où la file 1 n'est pas vide, et toutes les transitions d'un état où la file est vide à un état où la file 1 n'est pas vide sont des entrées. D'où :

$$C = \left(\begin{array}{c|c} C_1 & 0 \\ \hline A_2 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et de même} \quad C' = \left(\begin{array}{c|c} C'_1 & A_3 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$$

Avec cette décomposition, (13) entraîne, en prenant la deuxième composante, et après multiplication par P_2 :

$$P_2 D_2 \alpha_2 + s P_2 \alpha_2 = P_2 A_2 J_2 + P_2 A_4 \alpha_2$$

Mais la relation $PD = PA$ entraîne $P_2 D_2 = P_1 A_3 + P_2 A_4$

de même $P^b = \eta PC'$ entraîne : $P_2^b = \eta P_1 A_3$

$$(22) \quad \text{d'où : } s P_2 \alpha_2(s) = P_2 A_2 J_2 - \frac{1}{\eta} P_2^b \alpha_2(s)$$

$$\text{or} \quad P_2 \alpha_2(s) = P(E_1) \hat{a}_0(s) \quad \text{et} \quad P_2^b \alpha_2(s) = P^b(E_1) \hat{c}(s)$$

$$\text{nécessairement : } P_2 A_2 J_2 = \frac{1}{\eta} P^b(E^1) \quad (\text{faire } s=0 \text{ dans 22})$$

d'où :

$$(23) \quad \boxed{\hat{a}_0(s) = M \frac{1 - \hat{c}(s)}{s}} \quad \text{avec} \quad M = \frac{1}{\eta} \frac{P^b(E^1)}{P(E^1)}$$

Dans cette formule, M est l'inverse du temps moyen d'inoccupation de la file 1. Il est possible de préciser $P^b(E^1)$:

Cas ouvert : en utilisant (6) on obtient :

$$P^b(E^1) = q_{1,0} P(E^1) + \sum_{i=2}^n q_{1,i} P(E^1)$$

$$\text{soit : } P^b(E^1) = (1 - q_{1,1}) P(E^1)$$

$$(24) \quad \text{d'où : } \frac{1}{M} = \eta \frac{P(E^1)}{(1 - q_{1,1}) P(E^1)} \quad \text{soit : } \frac{1}{M} = \frac{\eta}{1 - q_{1,1}} = \frac{1}{e_1 (1 - q_{1,1})}$$

Cas fermé : en utilisant (10) on obtient :

$$P^b(E^1) = (1 - q_{1,1}) P_{N-1}(E_{N-1}^1)$$

$$(25) \quad \text{d'où : } \frac{1}{M} = \eta \frac{P(E^1)}{(1 - q_{1,1}) P_{N-1}(E_{N-1}^1)}$$

$$(26) \quad \text{Si } \mu_1 \text{ est constant, on a : } \frac{1}{M} = \frac{1}{e_1 (1 - q_{1,1})} \cdot \frac{\frac{K_{N-1}}{K_N} - \frac{e_1}{\mu_1}}{1 - \frac{K_{N-1}}{K_{N-2}} \frac{e_1}{\mu_1}}$$

2 Cas où le taux de service de la station 1 est constant

2.1 Distribution des interentrées et intersorties

Théorème Dans un réseau de Jackson, ouvert ou fermé, si le taux de service de la station 1 est constant, alors les interentrées et intersorties de la station 1 ont même loi de probabilité.

Ce résultat a été obtenu par Labetoulle - Pujolle - Soula dans le cas ouvert. Nous donnons ici une autre démonstration.

Remarquons tout d'abord que sous l'hypothèse du théorème, la probabilité stationnaire sachant que la file 1 n'est pas vide est égale à la probabilité stationnaire aux instants d'arrivée. Donc $\hat{a}(s)$ est aussi la T.L.S. du délai jusqu'à la prochaine entrée, sachant que la file 1 n'est pas vide. D'où :

$$\hat{A}(s) = \underbrace{P(E^1)}_{\text{file vide}} \hat{a}_0(s) + \underbrace{(1-P(E^1))}_{\text{file occupée}} \hat{a}(s)$$

En comparant avec la relation (18), il vient :

$$\hat{a}(s)(1 + \eta s(1-P(E^1))) = 1 - \eta s P(E^1) \hat{a}_0(s) .$$

Or, d'après (2), (8) : $\frac{1}{\eta} = PC^1 = \sum_{k \in E} P(\vec{k}) \mu_1(k_1) = \mu_1 \sum_{k \in E^1} P(\vec{k}) = \mu_1 (1-P(E^1))$

$$(27) \quad \hat{a}(s) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} [1 - \eta s P(E^1) \hat{a}_0(s)]$$

De plus, le délai jusqu'à la prochaine sortie sachant que la file est occupée, suit une loi exponentielle de paramètre μ_1 ; d'où :

$$(28) \quad \hat{b}(s) = \frac{\mu}{\mu_1 + s} [1 - P^b(E^1) + P^b(E^1) \hat{c}(s)]$$

En utilisant (23) et (27), il vient : $\hat{a}(s) = \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} [1 - \eta M P(E^1) (1 - \hat{c}(s))]$

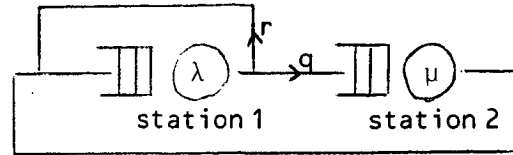
or $\eta M P(E^1) = P^b(E^1)$ par définition de M ; d'où le résultat par comparaison avec (28).

2.2 Flux d'entrée - flux de sortie

Malgré l'égalité des distributions d'interentrées - intersorties, les flux d'entrée et de sortie de la file ne sont pas équivalents.

Pour le montrer, considérons

l'exemple suivant :



Prenons $N=2$, un état du réseau est donné par le nombre de clients en station 1.

Pour étudier le flux des entrées, calculons :

$\hat{a}(s, s') = E(e^{-s(S_1 - S_0)} e^{-s'(S_2 - S_1)})$ où $S_0, S_1, S_2 \dots$ sont les instants d'entrée.

Par la propriété de Markov forte, on a :

$$E(e^{-s(S_1 - S_0)} e^{-s'(S_2 - S_1)} | X_{S_0} = i, X_{S_1} = j) = \alpha_i(s) \alpha_j(s')$$

$$\text{d'où } \hat{a}(s, s') = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 P^a(i) \alpha_i(s) J_i(i, j) \alpha_j(s')$$

où J est la matrice de transitions de la chaîne de Markov des états aux instants d'arrivée. D'après l'appendice, J vérifie : $(A+C-D)J = C$, d'où :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ 0 & \frac{\lambda q}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda r + \mu}{\lambda+\mu} \end{bmatrix}$$

P^a et α sont obtenus d'après la partie 1. En posant $s = \frac{1}{X}$ $s' = \frac{1}{X'}$,

$$\text{on obtient : } \hat{a}(s, s') = \frac{\lambda^2(\lambda r + \mu) [q r \lambda + (q r + 1) \mu]}{(\lambda q + \mu)(\lambda + \mu)} X X' + X X' \varepsilon(X, X').$$

avec $\lim_{(X, X') \rightarrow 0} \varepsilon(X, X') = 0$.

Calculons de même la loi jointe correspondant aux instants de sortie :

$$\hat{B}(s, s') = \sum_i \sum_j \beta_i(s) P^b(i) J'(i, j) \beta_j(s').$$

La matrice de transition J' vaut ici : $J' = \begin{bmatrix} q\alpha & r\alpha+q\beta & r\beta \\ q\alpha & r\alpha+q\beta & r\beta \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$

(avec $\alpha = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$, $\beta = 1-\alpha$)

On obtient : $\hat{\mathcal{B}}(s, s') = \frac{\lambda^2 [q(\lambda r + \mu)^2 + r\mu(\lambda + \mu)]}{(\lambda + \mu)(\mu + \lambda q)} XX' + XX' \varepsilon'(X, X')$

(avec $X = \frac{1}{s}$, $X' = \frac{1}{s'}$, $\lim_{(X, X') \rightarrow 0} \varepsilon'(X, X') = 0$).

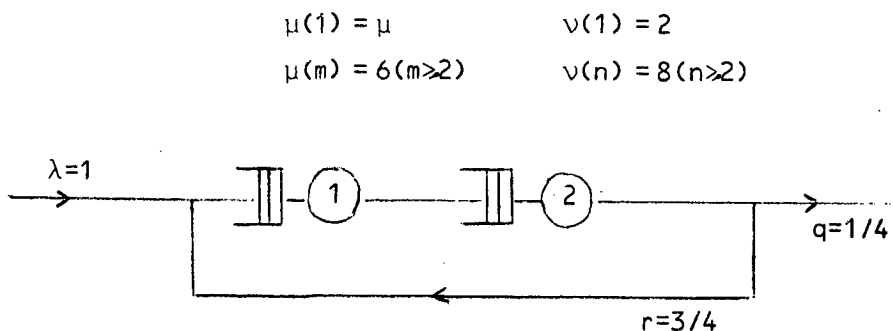
Le coefficient de XX' dans $\hat{\mathcal{A}}$ contient $\lambda r + \mu$ en facteur, contrairement à celui de $\hat{\mathcal{B}}$. Cela suffit à prouver que $\hat{\mathcal{A}} \neq \hat{\mathcal{B}}$.

Par la même méthode, on peut voir que $\hat{\mathcal{A}}(s, s') \neq \hat{a}(s) \hat{a}(s')$ et $\hat{\mathcal{B}}(s, s') = \hat{b}(s) \hat{b}(s')$, ce qui prouve que les flux d'entrée et de sortie ne sont pas de renouvellement.

3 Cas où les taux de service dépendent de l'état de la file

3.1 Contre-exemple : cas ouvert

Dans ce cas, on ne peut pas conclure à l'égalité des distributions des interentrées et intersorties. Considérons l'exemple suivant :



Les équations de renouvellement permettent d'écrire un développement limité d'ordre 1 en 0 de \hat{A} , qui à l'aide de (18), donne un développement limité d'ordre 2 en 0 de \hat{a} . Cela permet d'obtenir le moment d'ordre 2 pour

la distribution des interentrées (de même pour les sorties). Les calculs, assez longs, sont donnés en appendice.

Les interentrées et intersorties ont même moyenne ($\frac{1}{e_1} = 0,25$) (cf. 1.3). Par contre, les carrés des coefficients de variations, K_a et K_b sont différents : voir tableau ci-dessous. Pour $\mu=6$ (taux constant en station 1), on vérifie que $K_a = K_b$.

Dans la partie B, nous verrons qu'une condition suffisante pour obtenir l'égalité des distributions est :

$$(29) \quad \forall i \in [0, n] \quad \forall j \in [0, n] : e_i q_{i,j} = e_j q_{j,i} \quad (\text{avec } e_0 = \lambda).$$

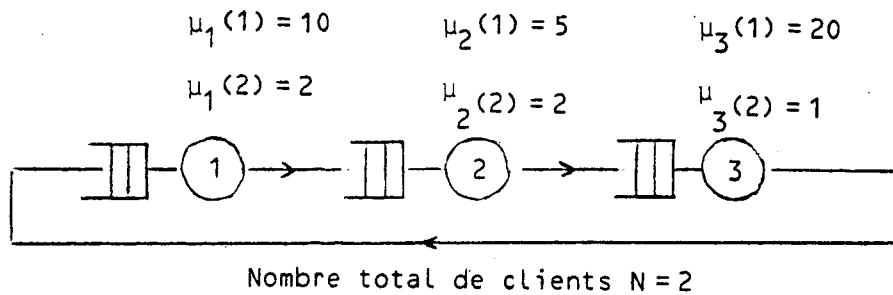
L'égalité des distributions est annoncée par Labetoulle - Pujolle - Soula dans le cas ouvert, et démontrée dans le cas d'une seule station : la relation (29) est alors vérifiée. Notre contre-exemple prouve que si l'on s'en affranchit, les distributions sont, en général, différentes.

MU	K_a	K_b
0,01	1,595 231 5	1,595 058 6
0,05	1,577 217 4	1,576 409 8
0,1	1,557	1,556
0,2	1,522	1,520
0,5	1,453	1,449
1	1,402	1,398
2	1,397	1,394
3	1,437	1,435
6	1,6	1,6
8	1,701 5	1,701 8
10	1,790 3	1,791
100	2,592 433 4	2,592 330 5
1000	2,776 912 4	2,776 891 6

3.2 Contre-exemple : cas fermé

Comme on peut s'y attendre, il existe aussi des contre-exemples dans le cas fermé. Il peut cependant être intéressant d'en posséder un, car les calculs sont beaucoup plus facilement vérifiables que dans le cas ouvert.

Le réseau est décrit ci-dessous : (trois stations au moins sont nécessaires, sinon la relation $e_i q_{ij} = e_j q_{ji}$ est vérifiée).



Les résultats sont les suivants :

s	0	0,01	0,1	1	4	10	100
$\hat{a}(s)$	1	.993 340 6	.937 950 8	.626 846 3	.339 718 5	.196 413 1	.028 067 7
$\hat{b}(s)$	1	.993 342 3	.938 095 4	.630 292 6	.343 514 3	.197 856 1	.028 071 8

coefficients	moyenne	C.C.V.
interentrées	$\eta = \frac{47}{70} \approx 0,671$	1,457
intersorties	$\eta = \frac{47}{70} \approx 0,671$	1,536

Exposons maintenant le détail des calculs :

Calcul de $\hat{a}(s)$

Les équations de renouvellement s'écrivent :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+s) \alpha_{0,0,2}(s) = 1 \\ (25+s) \alpha_{0,1,1}(s) = 5 \alpha_{0,0,2}(s) + 20 \\ (30+s) \alpha_{1,0,1}(s) = 10 \alpha_{0,1,1}(s) + 20 \\ (2+s) \alpha_{0,2,0}(s) = 2 \alpha_{0,1,1}(s) \\ (15+s) \alpha_{1,1,0}(s) = 10 \alpha_{0,2,0}(s) + 5 \alpha_{1,0,1}(s) \\ (2+s) \alpha_{2,0,0}(s) = 2 \alpha_{1,1,0}(s) \end{array} \right.$$

Elles forment un système triangulaire qu'on résout de proche en proche. \hat{a} se calcule ensuite par :

$$\hat{a}(s) = P_1(0,0,1)\alpha_{1,0,1}(s) + P_1(0,1,0)\alpha_{1,1,0}(s) + P_1(1,0,0)\alpha_{2,0,0}(s)$$

$$\hat{a}(s) = \frac{1}{7} (\alpha_{1,0,1}(s) + 4\alpha_{1,1,0}(s) + 2\alpha_{2,0,0}(s)).$$

Cela permet d'établir la première ligne du premier tableau.

Calcul des moments

Le système (E) permet aussi d'obtenir des développements limités à l'ordre 1 en 0 des fonctions $\alpha_{i,j,k}$; on obtient :

$$\alpha_{0,0,2}(s) = 1 - s + o(s)$$

$$\alpha_{0,2,0}(s) = 1 - 0,74s + o(s)$$

$$\alpha_{0,1,1}(s) = 1 - 0,24s + o(s)$$

$$\alpha_{1,1,0}(s) = 1 - \frac{5,38}{9}s + o(s)$$

$$\alpha_{1,0,1}(s) = 1 - \frac{0,34}{3}s + o(s)$$

$$\alpha_{2,0,0}(s) = 1 - \frac{9,88}{9}s + o(s)$$

d'où on sort :

$$\hat{A}(s) = \frac{1}{0,235} (0,050\alpha_{002} + 0,010\alpha_{011} + 0,005\alpha_{101} + 0,100\alpha_{020} + 0,002\alpha_{110} + 0,050\alpha_{200})$$

$$\hat{A}(s) = 1 - \frac{1,7443}{9 \times 0,235} s + o(s)$$

grâce à la formule (18), on a : $\hat{a}(s) = 1 - \eta s \hat{A}(s)$

$$\text{or } \eta = \frac{K_1}{e_2 K_2} = \frac{0,235}{0,350} = \frac{47}{70} \approx 0,671$$

$$\text{d'où } \hat{a}(s) = 1 - \frac{47}{70} s + \frac{34,886}{7 \times 9} s^2 + o(s^2)$$

La formule précédente donne le moment d'ordre 2 des interentrées :

$$m_2 = \hat{a}''(0) = \frac{34,886 \times 2}{7 \times 9} \approx 1,107 492 1$$

et le carré du coefficient de variation :

$$K_a = \frac{m_2}{\eta^2} - 1 \approx 1,456 637$$

Intersorties : on a, de manière analogue, pour les sorties :

$$\left\{ \begin{array}{l} (2+s) \beta_{2,0,0}(s) = 2 \\ (30+s) \beta_{1,0,1}(s) = 10 + 20 \beta_{2,0,0}(s) \\ (15+s) \beta_{1,1,0}(s) = 10 + 5 \beta_{1,0,1}(s) \\ (1+s) \beta_{0,0,2}(s) = \beta_{1,0,1}(s) \\ (25+s) \beta_{0,1,1}(s) = 5 \beta_{0,0,2}(s) + 20 \beta_{1,1,0} \\ (2+s) \beta_{0,2,0}(s) = 2 \beta_{0,1,1}(s) \end{array} \right.$$

d'où : $\hat{b}(s) = \frac{1}{7} (2 \beta_{1,1,0}(s) + 4 \beta_{0,2,0}(s) + \beta_{0,1,1}(s))$ qui donne les valeurs du tableau.

On obtient aussi : $\hat{B}(s) = 1 - \frac{0,6001}{3 \times 0,235} s + 0(s)$

d'où : $\hat{b}(s) = 1 - \frac{47}{70} s + \frac{20 \times 0,6001}{7 \times 3} s^2 + 0(s) ;$

on obtient le moment d'ordre 2 : $m_2^* = 1,143\,047\,6$

et le C.C.V.

$$K_b = \frac{\frac{m_2^*}{2}}{m_1} - 1 = 1,535\,506\,3$$

B - RESEAUX A FORME PRODUIT REVERSIBLES

Nous avons montré en partie A que dans un réseau à forme produit, il n'y a pas nécessairement égalité de distribution entre les interentrées et intersorties. Dans cette partie, nous verrons que, sous une hypothèse de réversibilité de la chaîne de Markov des stations visitées, ces distributions sont égales, bien que les flux d'entrée et de sortie ne soient pas nécessairement équivalents.

1 Réseaux classiques à forme produit

Nous considérons des réseaux fermés ou ouverts, contenant I stations de service, et R classes de clients. Dans le cas ouvert, on notera l'extérieur comme la station 0. Un client de classe r qui sort de la station i (qui arrive dans le réseau si $i=0$) peut se rendre en station j (quitter le réseau si $j=0$) avec la probabilité $q_{i,j}^r$. Les flux des arrivées sont poissonniens, de paramètre λ^r pour la classe r .

Il peut y avoir des limitations de capacité dans certaines stations ou sous-ensembles de stations.

Un état est décrit par $\vec{n} = (\vec{n}_1, \vec{n}_2, \dots, \vec{n}_I)$ où $\vec{n}_i = (\vec{n}_i^1, \dots, \vec{n}_i^R)$ où n_i^r est le nombre de clients de classe r en station i . L'ensemble des états possibles est noté D .

Dans le cas fermé, $(\vec{e}_i^r)_{1 \leq i \leq I}$ est, pour tout r , une solution non nulle de :

$$e_i^r = \sum_{j=1}^I e_j^r q_{j,i}^r ;$$

dans le cas ouvert on pose $e_0^r = \lambda^r$ et $(e_i^r)_{i \leq i \leq I}$ est la solution de :

$$e_i^r = \sum_{j=0}^I e_j^r q_{j,i}^r .$$

Le taux de probabilité qu'un service de classe r s'achève en station i est supposé avoir la forme : $\frac{\mu_i(n_i)}{w_{i,r}} \times \frac{n_{i,r}}{n_i}$, où $n_i = |\vec{n}_i|$ est le nombre total de clients en station i .

On obtient ainsi les modèles simplifiés des réseaux BCMP et extensions

classiques :

- si $w_{i,r} = 1$, la station i est de type 1 (PAPS)
- si $w_{i,r} = \frac{\mu_i}{\mu_{i,r}}$ et $\mu_i(n_i) = \mu_i \times n_i$, la station est de type 3 (infinité de serveurs).
- si $w_{i,r} = \frac{\mu_i}{\mu_{i,r}}$ et $\mu_i(n_i) = \mu_i$, la station est de type 2 (temps partagé).

S'il y a des limitations de capacité, la politique de blocage peut être de trois types :

- type 1 (station transparente) Si un client est refusé à une station, il la traverse instantanément, et continue suivant les routages $q_{i,j}^r$.
- type 2 (blocage partiel) Si un client sortant de la station i est refusé à une station j , il reprend instantanément son service en station i . (Dans le cas ouvert, si le client refusé, arrive de l'extérieur, il est perdu).
- type 3 (blocage global) Dans le cas de limitation par station, si une station est pleine, les autres stations interrompent leur service jusqu'à libération de la station (les arrivées de l'extérieur sont suspendues, dans le cas ouvert).

De tels réseaux ont été étudiés par PITTEL et LE NY, dans le cas fermé.

Pour le type 2 ou le type 3, la forme produit est assurée. Pour le type 2 (PITTEL), elle l'est à la condition suffisante : $e_{i,r} q_{i,j}^r = e_{j,r} q_{j,i}^r$ (1)

Ces résultats s'étendent facilement au cas ouvert.

Sous ces hypothèses, et sous réserve d'ergodicité, la probabilité stationnaire est donnée par :

$$(2) \quad P(\vec{n}) = C \prod_{i=1}^I f_i(\vec{n}_i) \quad \text{où} \quad f_i(\vec{n}_i) = \frac{1}{\mu_i(1) \dots \mu_i(n_i)} n_i! \prod_{r=1}^R \frac{(e_{i,r} w_{i,r})^{n_{i,r}}}{n_{i,r}!}$$

C étant une constante de normalisation.

[BCMP - PITTEL - LE NY] .

2 Réversibilité

2.1 Définition

Soit $(y_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus de Markov ergodique d'ensemble d'états E , de matrice de transition A , de probabilité stationnaire P . On dit qu'il est réversible si la condition suivante est vérifiée :

$$(3) \quad \forall k \in E \quad \forall k' \in E, \quad P(k)A(k, k') = P(k')A(k', k)$$

Lorsque le processus de Markov est réversible, pour toute suite de réels $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$, les suites $(y_{t_1} \dots y_{t_n})$ et $(y_{T-t_1} \dots y_{T-t_n})$ ont même distribution de probabilité. [GELENBE - PUJOLLE]. Si un réseau de files d'attente est représenté par un processus de Markov réversible, on le dit aussi réversible. Il faut remarquer que le processus de Markov ne donne pas d'information relative aux éventuels rebouclages.

Pour une chaîne de Markov, la réversibilité s'exprime par :

$$e_i q_{i,j} = e_j q_{j,i} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} q_{i,j} & \text{probabilité de transition} \\ e_i & \text{probabilité stationnaire} \end{cases}$$

2.2 Condition de réversibilité

Théorème

Les réseaux classiques à forme produit sont réversibles si l'égalité (1)

$$e_{i,r} = e_{j,r} q_{j,i}^r$$

est vérifiée pour $\begin{cases} 1 \leq i \leq I & 1 \leq j \leq I & 1 \leq r \leq R & \text{dans le cas fermé} \\ 0 \leq i \leq I & 0 \leq j \leq I & 1 \leq r \leq R & \text{dans le cas ouvert.} \end{cases}$

(Rappel : dans le cas ouvert on a posé $e_{0,r} = \lambda$).

Démonstration

a) / Etudions tout d'abord les réseaux sans limitation, ou avec blocage partiel (type 2).

Soit \vec{n} un état possible ($\vec{n} \in D$) et notons $\vec{n}_{i,j}^r$ l'état obtenu à partir de \vec{n} après transfert d'un client de classe r de la station i à la

station j . Par convention, la station 0 représente l'extérieur ; ainsi $\vec{n}_{0-,i+}^r (= \vec{n}_{i+}^r)$ est l'état obtenu après arrivée dans le réseau en station i d'un client de classe r ; $\vec{n}_{i-,0+}^r = \vec{n}_{i-}^r$ est l'état obtenu après arrivée dans le réseau d'un client de classe r quittant la station i .

Si $i \neq j$, le taux de transition de \vec{n} à $\vec{n}_{i-,j+}^r$ est donné par :

$$(4) \quad \begin{cases} \cdot \text{ si } i \neq 0 : A(\vec{n}, \vec{n}_{i-,j+}^r) = \frac{\mu_i(n_i)}{w_{i,r}} \frac{n_{i,r}}{n_i} q_{i,j,r} 1_D(\vec{n}_{i-,j+}^r) 1_D(\vec{n}) \\ \cdot \text{ si } i=0 : A(\vec{n}, \vec{n}_{0-,j+}^r) = \lambda^r q_{0,j}^r 1_D(\vec{n}_{0-,j+}^r) 1_D(\vec{n}) \end{cases}$$

$$\text{où } \begin{cases} 1_D(\vec{m}) = 0 & \text{si } \vec{m} \notin D \quad (\vec{m} \text{ est un état impossible}) \\ 1_D(\vec{m}) = 1 & \text{si } \vec{m} \in D \quad (\vec{m} \text{ est un état possible}). \end{cases}$$

Posons $\vec{n}' = \vec{n}_{i-,j+}^r$ (et $\vec{n}' = (\vec{n}_1', \dots, \vec{n}_I')$) ; on a

$$\cdot \text{ si } i \neq 0 \text{ et } j \neq 0 : f_i(\vec{n}_i) f_j(\vec{n}_j) A(\vec{n}, \vec{n}') = f_i(\vec{n}_i') f_j(\vec{n}_j) e_{i,r} q_{i,j}^r$$

en remarquant que $\vec{n}_{j-,i+}^r = \vec{n}$, on obtient :

$$f_i(\vec{n}_i') f_j(\vec{n}_j') A(\vec{n}', \vec{n}) = f_i(\vec{n}_i') f_j(\vec{n}_j) e_{j,r} q_{j,i}^r$$

comme l'égalité (1) est vérifiée par hypothèse, on en déduit que :

$$P(\vec{n}) A(\vec{n}, \vec{n}') = P(\vec{n}') A(\vec{n}', \vec{n}) .$$

$$\cdot \text{ si } i=0 ; \text{ alors : } f_j(\vec{n}_j) A(\vec{n}, \vec{n}') = \lambda^r q_{0,j}^r f_j(\vec{n}_j')$$

$$\text{et } f_j(\vec{n}_j') A(\vec{n}', \vec{n}) = f_j(\vec{n}_j) e_j^r q_{j,0}^r$$

on conclut de la même façon

\cdot si $j=0$; on a des résultats analogues.

b) Etudions maintenant les réseaux avec blocage de type 1. (Stations transparentes). Notons $P_{i,j}^r(\vec{n})$ la probabilité pour un client de classe r quittant la station i alors que le réseau est dans l'état \vec{n} , de

se rendre en station j . Notons aussi $F_i^r(\vec{n})$ l'ensemble des stations accessibles à un client de classe r quittant la station i , le réseau étant dans l'état \vec{n} juste avant son départ.

$$\text{On a : } F_i^r(\vec{n}) = \{k, \vec{n}_{i-,j+}^r \in D\}.$$

Par convention, dans le cas ouvert, l'extérieur est la station 0. Ainsi $F_0^r(\vec{n}) = \{j \neq 0, \vec{n}_{j+}^r \in D\}$ et pour tout $i \neq 0$: $0 \in F_i^r(\vec{n})$.

Nous allons montrer que, sous l'hypothèse du théorème, on a :

$$(5) \quad \text{si } j \in F_i^r(\vec{n}) \text{ alors } e_i^r P_{i,j}(\vec{n}) = e_i^r P_{j,i}(\vec{n}_{i-,j+}^r)$$

Pour cela, considérons la chaîne de Markov $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}}$ définie comme suit :

- \vec{n} , i et r sont fixés.
- l'ensemble des états de Y est l'ensemble des stations 1 à n , (avec éventuellement la station 0 dans le cas ouvert).
- Y_{t+1} est la première station disponible rencontrée par un client de classe r sortant de la station Y_t , alors que le réseau était dans \vec{n}_{i-,Y_t+}^r (juste avant son départ).

Ainsi, si $X_1 \dots X_t \dots$ est la chaîne de Markov des stations abordées (suivant les transitions $q_{i,j,r}$), posons $T_1 = \inf \{t \in \mathbb{N}, \vec{n}_{i-,X_t+}^r \in D\}$;

alors $Y_1 = X_{T_1}$. Ensuite $T_2 = \inf \{t \in \mathbb{N}, t > T_1, \vec{n}_{i-,X_t+}^r \in D\}$ et $Y_2 = X_{T_2}$ etc...

Appelons $x_{\alpha,\beta}$ les probabilités de transition de cette chaîne ; $x_{\alpha,\beta}$ est l'unique solution de :

$$(6) \quad \begin{cases} x_{\alpha,\beta} = q_{\alpha,\beta}^r + \sum_{\gamma \notin F_i^r(\vec{n})} q_{\alpha,\gamma}^r x_{\gamma,\beta} & \text{si } \beta \in F_i^r(\vec{n}) \\ x_{\alpha,\beta} = 0 & \text{si } \beta \notin F_i^r(\vec{n}). \end{cases}$$

En appliquant le lemme énoncé et démontré plus bas, on a :

$$(7) \quad e_{\alpha}^r x_{\alpha,\beta} = e_{\beta}^r x_{\beta,\alpha}.$$

Remarquons d'une part que $x_{i,j} = P_{i,j}^r(\vec{n})$. D'autre part, si les états \vec{n} et $\vec{n}_{i-,j+}^r$ sont simultanément possibles, alors un client de classe r sortant de la station i quand le réseau est dans l'état \vec{n} peut se rendre dans les mêmes stations que s'il sortait de la station j quand le réseau est dans l'état $\vec{n}_{i-,j+}^r$; d'où $F_i^r(\vec{n}) = F_j(\vec{n}_{i-,j+}^r)$. En considérant la chaîne Y_t^r associée à la station j au lieu de i , et à l'état $\vec{n}_{i-,j+}^r$ au lieu de \vec{n} , on obtient les mêmes équations (6), d'où :

$$x_{j,i} = P_{j,i}^r(\vec{n}_{i-,j+}^r)$$

Appliquant (7) avec $(\alpha, \beta) = (i, j)$, on obtient la relation (5).

La relation (5) étant démontrée, on obtient le théorème comme dans le premier cas (mais $q_{i,j}^r$ est remplacé par $P_{i,j}^r(\vec{n})$).

On a utilisé, pour obtenir (7), le lemme suivant :

Lemme

Si la chaîne $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est réversible, alors (Y_t) l'est aussi ; de plus :

$$(7) \quad e_\alpha^r x_{\alpha,\beta} = e_\beta^r x_{\beta,\alpha} \quad \text{pour tous } \alpha, \beta.$$

Démonstration

La chaîne X est supposée ergodique. Comme $F_i(\vec{n}) \neq \emptyset$, il est facile de voir que la chaîne Y possède une seule classe de récurrence.

Soit f_α la probabilité stationnaire de la chaîne Y . Alors :

$$(8) \quad f_\alpha = \frac{e_\alpha^r}{\sum_{\beta \in F_i(\vec{n})} e_\alpha^r} \quad \text{si } \alpha \in F_i(\vec{n}) ; \quad f_\alpha = 0 \quad \text{si } \alpha \notin F_i(\vec{n}).$$

En effet, en multipliant la première égalité de (6) par e_α^r , et en sommant sur tous les α , on obtient :

$$\sum_{\alpha} e_\alpha^r x_{\alpha,\beta} = e_\beta^r + \sum_{\gamma \notin F_i(\vec{n})} e_\gamma^r x_{\gamma,\beta}$$

d'où $\sum_{\alpha \in F_i(\vec{n})} e_\alpha^r x_{\alpha,\beta} = e_\beta^r$; ce qui suffit pour obtenir (8).

Montrons maintenant que la chaîne Y est réversible ; soit T_1 défini plus haut (première entrée dans $F_i(\vec{n})$). On a $X_{T_1} = Y_1$. Calculons, pour $\alpha \in F_i(\vec{n})$ et $\beta \in F_i(\vec{n})$, la quantité $\mathbb{P}(Y_0 = \alpha, Y_1 = \beta) = f_{\alpha} x_{\alpha, \beta}$.

On a : $\mathbb{P}(Y_0 = \alpha ; Y_1 = \beta \mid T_1 = t) =$

$$\sum_{\gamma_1 \notin F_i(\vec{n}) \dots \gamma_{t-1} \notin F_i(\vec{n})} \mathbb{P}(X_0 = \alpha, X_1 = \gamma_1 \dots X_{t-1} = \gamma_{t-1}, X_t = \beta)$$

comme la chaîne X est réversible par hypothèse, cela vaut aussi :

$$\sum_{\gamma_1 \notin F_i(\vec{n}) \dots \gamma_{t-1} \notin F_i(\vec{n})} \mathbb{P}(X_0 = \beta, X_1 = \gamma_{t-1} \dots X_{t-1} = \gamma_1, X_t = \alpha)$$

qui est exactement :

$$\mathbb{P}(X_0 = \beta, X_{T_1} = \alpha, T_1 = t) \text{ car } \alpha \in F_i(\vec{n}) \text{ par hypothèse}$$

$$\text{D'où : } \mathbb{P}(X_0 = \alpha, X_{T_1} = \beta) = \sum_{t \geq 1} \mathbb{P}(X_0 = \alpha, X_{T_1} = \beta, T_1 = t) = \mathbb{P}(X_0 = \beta, X_{T_1} = \alpha)$$

$$\text{ce qui démontre que : } \mathbb{P}(Y_0 = \alpha, Y_1 = \beta) = \mathbb{P}(Y_0 = \beta, Y_1 = \alpha)$$

d'où le lemme à l'aide de (8).

c) Cas des réseaux à blocage de type (3) (blocage total). Dans ce

$$i, j$$

$$p_{ij}^r(\vec{n}) = q_{i,j}^r \text{ et } p_{ji}^r(\vec{n}_{i-,j+}^r) = q_{j,i}^r$$

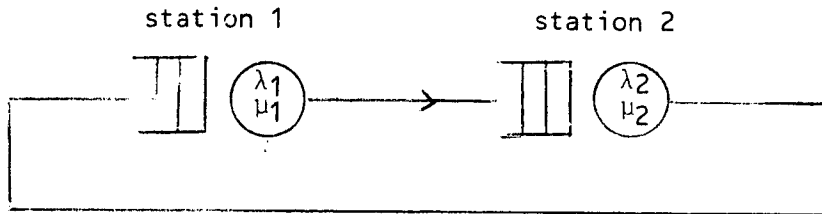
A partir de ces remarques, on poursuit la démonstration comme en a).

2.3 Remarques

a) Le théorème précédent exprime une nouvelle propriété d'insensibilité des réseaux classiques à forme produit, avec ou sans limitation de

capacité : ils sont réversibles dès que les chaînes de Markov des stations visitées sont réversibles, c'est à dire, dès qu'une condition portant sur les routages est vérifiée.

Cette propriété n'est pas assurée si le réseau n'a pas la forme produit. Considérons l'exemple suivant :



Il y a 1 client de classe 1, 2 clients de classe 2. Les taux de service pour la classe 1 sont λ_1 et λ_2 ; pour la classe 2, μ_1 et μ_2 . En station 1, il y a un seul serveur, avec priorité au client de classe 1. En station 2, il y a un serveur par classe.

On peut résoudre les équations de Chapman-Kolmogorov et constater que ce réseau n'a pas la forme produit. Montrons qu'il n'est pas réversible : un état est noté (i_1, i_2) où i_r est le nombre de clients de classe r en station 1.

Une équation de Chapman-Kolmogorov est :

$$p(1,0)(\lambda_1 + \mu_2) = p(0,0)\lambda_2$$

qui est incompatible avec la condition de réversibilité :

$$p(1,0)\lambda_1 \stackrel{?}{=} p(0,0)\lambda_2$$

Cependant, comme il n'y a que deux stations, les chaînes de Markov des stations visitées sont réversibles.

b) La condition de réversibilité (1) est réalisée si les matrices $(q_{i,j}^r)_{i,j}$ sont symétriques, ou encore si elles sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_I & a_I \end{bmatrix}$$

(c'est à dire qu'un client ne peut se diriger que vers la station précédente ou la station suivante).

[PITTEL].

Un réseau cyclique comportant plus de deux stations n'est pas réversible. Dans le cas ouvert, il faut considérer l'extérieur comme une seule station (numéro 0).

3 Interentrées et intersorties

On pourrait penser que les flux d'entrée et de sortie sont équivalents si le réseau est réversible, mais cela n'est pas vrai en général, comme le montre l'exemple A-2.2.

En général, on a cependant le résultat suivant :

Théorème

Dans un réseau à forme produit classique réversible, les interentrées et intersorties de classe r ont même distribution.

Démonstration

Considérons d'abord le cas fermé.

Notons $d_{i,j}^r(\vec{n})$ le taux de transfert d'un client de classe r de la

station i à la station j : $(d_{i,j}^r(\vec{n}) = A(\vec{n}, \vec{n}_{i-,j+}^r)$ si $i \neq j$ et

$$A(\vec{n}, \vec{n}) = \sum_{r=1}^K \sum_{j=1}^I d_{i,i}^r(\vec{n}). \text{ Notons aussi } d^r(\vec{n}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I d_{i,j}^r(\vec{n}).$$

Calculons les probabilités stationnaires aux instants d'entrée d'un client de classe r, $P^{a,r}$ et aux instants de sorties $P^{b,r}$:

$$(8) \quad P^{a,r}(\vec{n}) = \eta \sum_{i \in F_1(\vec{n})} P(\vec{n}_{i+,1-}^r) d_{i,1}^r(\vec{n}_{i+,1-}^r)$$

$$(9) \quad p^{b,r}(\vec{n}) = \eta^r \sum_{\text{itq } 1 \in F_1(\vec{n})} P(\vec{n}_{i-,1+}^r) d_{1,i}^r(\vec{n}_{i-,1+}^r)$$

(Nous verrons plus tard que $\eta = \eta^r$, mais cela peut aussi se démontrer directement par sommation sur \vec{n}).

Posons $r=1$ et notons α_r (resp. β_n) la T.L.S du délai jusqu'à la prochaine entrée (resp. sortie) de classe 1 sachant que le réseau est dans l'état \vec{n} . $\hat{\alpha}$ (resp. $\hat{\beta}$) est la T.L.S d'une interentrée de classe 1 (resp. intersortie).

Les équations de renouvellement, analogues à A-(11) (12) s'écrivent :

$$(10) \quad \left(\sum_{r=1}^K d^r(\vec{n}) + s \right) \alpha_{\vec{n}}(s) = \sum_{r=2}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I d_{i,j}^r(\vec{n}) \alpha_{\vec{n}_{i-,j+}^r}(s) + \sum_{i=1}^I d_{i,1}^1(\vec{n}) \\ + \sum_{i=1}^I \sum_{j=2}^I d_{i,j}^1(\vec{n}) \alpha_{\vec{n}_{i-,j+}^1}(s)$$

$$(11) \quad \left(\sum_{r=1}^K d^r(\vec{n}) + s \right) \beta_{\vec{n}}(s) = \sum_{r=2}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I d_{i,j}^r(\vec{n}) \beta_{\vec{n}_{i-,j+}^r}(s) + \sum_{j=1}^I d_{1,j}^1(\vec{n}) \\ + \sum_{i=2}^I \sum_{j=1}^I d_{i,j}^1(\vec{n}) \beta_{\vec{n}_{i-,j+}^1}(s)$$

En multipliant (10) par $\beta_{\vec{n}}(s) P(\vec{n})$ et (11) par $\alpha_{\vec{n}}(s) P(\vec{n})$, puis en sommant sur \vec{n} , on obtient deux membres de gauche identiques, d'où on déduit l'égalité : [LABETOULLE - PUJOLLE - SOULA] : $A1 + A2 + A3 = B1 + B2 + B3$, avec :

$$A1 = \sum_{r=2}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \sum_{\vec{n} \in t.q. \vec{n}_{i-,j+}^r \in D} d_{i,j}^2(\vec{n}) \alpha_{\vec{n}_{i-,j+}^r} \beta_{\vec{n}} P(\vec{n})$$

$$A2 = \sum_{i=1}^I \sum_{\vec{n} \in D} \sum_{t.q. \vec{n}_{i-,j+}^r \in D} d_{i,1}^1(\vec{n}) \beta_{\vec{n}}(s) P(\vec{n})$$

$$A3 = \sum_{i=2}^I \sum_{j=2}^I \sum_{\vec{n} \in D} \sum_{t.q} \vec{n}_{i-,j+}^r d_{i,j}^1(\vec{n}) \alpha_{\vec{n}_{i-,j+}}^1(s) \beta_{\vec{n}}(s) P(\vec{n})$$

$$B1 = \sum_{i=1}^K \sum_{i=2}^I \sum_{j=1}^I \sum_{\vec{n} \in D} \sum_{t.q} \vec{n}_{i-,j+}^r d_{i,j}^r(\vec{n}) \beta_{\vec{n}_{i-,j+}}^r(s) \alpha_{\vec{n}}(s) P(\vec{n})$$

$$B2 = \sum_{j=1}^I \sum_{\vec{n} \in D} \sum_{t.q} \vec{n}_{j+,1-} d_{1,j}^1(\vec{n}) \alpha_{\vec{n}}(s) P(\vec{n})$$

$$B3 = \sum_{i=2}^I \sum_{j=1}^I \sum_{\vec{n} \in D} \sum_{t.q} \vec{n}_{i-,j+}^r d_{i,j}^1(\vec{n}) \beta_{\vec{n}_{i-,j+}}^1(s) \alpha_{\vec{n}}(s) P(\vec{n})$$

Remarquons que, d'après (1) et (7) $d_{i,j}^r(\vec{n}) P(\vec{n}) = d_{j,i}^r(\vec{n}_{i-,j+}^r) P(\vec{n}_{i-,j+}^r)$

Or, après le changement de variable $\vec{n} \rightarrow \vec{n}_{i-,j+}^r$, on obtient

$$A1 = \sum_{i=2}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \sum_{\vec{m} \in D} \sum_{t.q} \vec{m}_{i+,j-}^r d_{i,j}^r(\vec{m}_{i+,j-}^r) \alpha_{\vec{m}} \beta_{\vec{m}_{i+,j-}} P(\vec{m}_{i+,j-}^r)$$

d'où

$$A1 = \sum_{r=2}^K \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^I \sum_{\vec{m} \in D} \sum_{t.q} \vec{m}_{i+,j-}^r d_{j,i}^r(\vec{m}) \alpha_{\vec{m}} \beta_{\vec{m}_{i+,j-}} P(\vec{m})$$

et donc $A1 = B1$

De même on obtient $A3 = B3$.

Enfin, on a, d'après (8) :

$$\hat{a}(s) = \eta \sum_{i=1}^I \sum_{\vec{n} \in D} \sum_{t.q} \vec{n}_{1-,j+}^r P(\vec{n}_{i+,1-}^r) d_{i,1}^r(\vec{n}_{i+,1-}^r) \alpha_{\vec{n}}(s)$$

On obtient alors de façon analogue : $\frac{1}{\eta} \hat{a}(s) = B2$.

De même aussi : $\frac{1}{\eta} \hat{b}(s) = A2$.

D'où l'égalité $\frac{1}{\eta} \hat{a}(s) = \frac{1}{\eta} \hat{b}(s)$. En faisant $s=0$, on obtient $\eta = \eta'$ d'où $\hat{a}(s) = \hat{b}(s)$.

Dans le cas ouvert, il faut remplacer $\sum_{i=1}^I$ par $\sum_{i=0}^I$, grâce à la convention station 0 = extérieur. La démonstration est alors tout à fait analogue.

CONCLUSION

Les exemples A-3 montrent que, même en l'absence de rebouclage, dans un réseau de Jackson, les interentrées et intersorties n'ont pas même distribution. L'égalité de distribution est assurée :

- dans les réseaux de Jackson à taux constant dans la station considérée,
- dans les réseaux classiques à forme produit réversibles (multiclasses, avec ou sans limitation de capacité).

La réversibilité est assurée dès que la condition $e_i^r q_{ij}^r = e_j^r q_{ji}^r$, portant sur les routages, est vérifiée.

APPENDICE 1

CHAINE DE MARKOV INCLUSE

Soit $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ un processus de Markov ergodique. L'ensemble des états, noté E , est dénombrable.

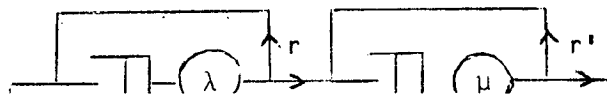
$A(i,j)$ est le taux de transition de l'état i à l'état j (éventuellement $i=j$), et posons $d(i) = \sum_{j \in E} A(i,j)$.

Considérons certaines transitions, dites "privilégiées". Elles sont définies par :

- d'une part, un sous-ensemble F de $E \times E$; on pose $C(i,j) = A(i,j) \mathbb{1}_F(i,j)$ si $i \neq j$,
- d'autre part, des nombres $r_i \in [0,1]$; on pose $C(i,i) = r_i A(i,i)$.

La loi de probabilité d'une transition privilégiée du type (i,j) est exponentielle de paramètre $C(i,j)$; elle mène de l'état i à l'état j .

Par exemple, si (Y_t) est le nombre de clients en station 1 du réseau suivant :



il y a $N=2$ clients
réseau de Jackson

$$A = \begin{bmatrix} \mu r' & \mu q' & 0 \\ \lambda q & \lambda r + \mu r' & \mu q' \\ 0 & \lambda q & \lambda r \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \mu q' & 0 \\ 0 & \lambda r & \mu q' \\ 0 & 0 & \lambda r \end{bmatrix}$$

C représente les entrées en station 1, on a $F = \{(0,1) ; (1,2)\}$

et $r_1 = 0$ $r_2 = \frac{\lambda r}{\lambda r + \mu r'}$ $r_3 = 1$

Soit X_n l'état atteint par le processus après la n^{e} transition (quelconque).

On a le théorème :

Théorème

*Soit P la probabilité stationnaire du processus de Markov.
La probabilité Q d'état après une transition privilégiée est donnée par :*

$$Q = \eta PC \quad \text{où } \eta \text{ est une constante de normalisation}$$

Démonstration

Soit T_1, T_2, \dots la suite des instants de transition privilégiée. On suppose $C \neq 0$; alors comme le processus est ergodique, $\sup T_n = +\infty$. Considérons alors la chaîne de Markov $(X_{T_1}, X_{T_2}, \dots)$. Elle possède une seule classe d'états récurrents : c'est l'ensemble des états de E que l'on peut atteindre après une transition privilégiée.

$$J(i, j) = P\{X_{T_1} = j \mid X_0 = i\}$$

$$(1) \quad J(i, j) = \sum_{C(i, j) > 0} P(X_1 = j \mid X_0 = i) + \sum_{\substack{k \in E \\ t.q. C(i, k) = 0}} P(X_1 = k \mid X_0 = i) J(k, j)$$

Soit K la matrice de transition de la chaîne de Markov X ; on a : $K = D^{-1}A$ où D est la matrice diagonale de terme général $d(i)$,

d'où (1) peut se traduire par : $J = D^{-1}C + (D^{-1}A - D^{-1}C)J$

d'où

(2)

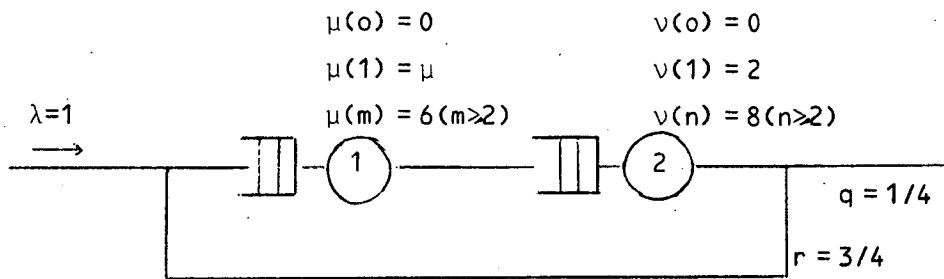
$$(D + C - A)J = C$$

En multipliant (2) à gauche par P , il vient, comme $P(D - A) = 0$:

$PCJ = PC$; comme J est la matrice d'une chaîne de Markov possédant une seule classe de récurrence, cela entraîne que PC et Q sont colinéaires.

APPENDICE 2

CONTRE-EXEMPLE 3.1 ; DETAIL DES CALCULS



Probas stat. : $P(m, n) = K f(m) g(n)$ avec $\begin{cases} f(m) = \frac{4}{\mu} \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1} & \text{si } m \geq 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

$K^{-1} = \left(1 + \frac{12}{\mu}\right) \times 5$ $\begin{cases} g(n) = \frac{4}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

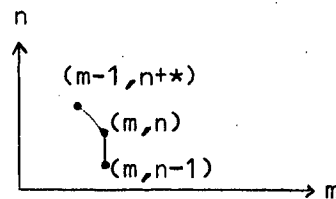
But Calculer coefficient de variation des interentrées et intersorties de la station 1.

Méthode Obtenir un DL_2 de \hat{a} en 0, à l'aide d'un DL_1 en 0 de \hat{A} .
(idem pour sorties).

Equations de renouvellement

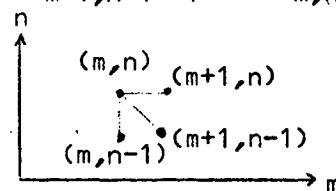
délais jusqu'à la prochaine entrée :

(6) $[1 + \mu(m) + v(n) + s] \alpha_{m,n}(s) = 1 + \frac{3}{4} v(n) + \mu(m) \alpha_{m-1,n+1} + \frac{1}{4} v(n) \alpha_{m,n-1}$



délais jusqu'à la prochaine sortie :

(7) $[1 + \mu(m) + v(n) + s] \beta_{m,n}(s) = \beta_{m+1,n}(s) + \mu(m) + \frac{3}{4} v(n) \beta_{m+1,n-1}(s) + \frac{1}{4} v(n) \beta_{m,n-1}(s)$



Relation

$$(8) \quad \eta^{-1} \frac{1-\hat{a}(s)}{s} = \hat{A}(s) \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \hat{A}(s) = \text{T.L.S. délai jusqu'à la prochaine} \\ \text{entrée} \\ \hat{a}(s) = \text{T.L.S. interentrées.} \end{array}$$

$$(9) \quad \eta^{-1} = \sum_{\substack{m \geq 0 \\ n \geq 0}} P(m,n) \left[\lambda + \frac{3}{4} v(n) \right]$$

$$(\text{cf. §A-1.3}) \quad \text{ici} \quad \eta^{-1} = 4$$

$$(10) \quad \text{de même} \quad \eta^{-1} \frac{1-\hat{b}(s)}{s} = \hat{B}(s) \quad \text{pour les sorties}$$

$$(11) \quad \text{or} \quad \eta'^{-1} = \eta^{-1} = 4.$$

Pour calculer $\hat{a}(s)$ et $\hat{b}(s)$, nous chercherons à établir des DL₁ de \hat{A} et \hat{B} au voisinage de 0.

A - ETUDE DES INTERENTREES

A1 Décomposition

$$\begin{aligned} (12) \quad \hat{A}(s) &= K \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} f(m) g(n) \alpha_{m,n}(s) \\ &= K \sum_{m \geq 0} f(m) \underbrace{\sum_{n \geq 0} g(n) \alpha_{m,n}(s)}_{X_m(s)} \end{aligned}$$

A2 Calcul de X_0

La relation (6) donne :

$$(1+v(n)+s)\alpha_{0,n}(s) = 1 + \frac{3}{4} v(n) + \frac{1}{4} v(n)\alpha_{0,n-1}$$

en multipliant par $g(n)$, puis en sommant sur n , on obtient :

$$(1+8+s) \sum_{n \geq 0} g(n) \alpha_{0,n}(s) - 8g(1) \alpha_{0,1}(s) - 8g(0) \alpha_{0,0}(s) + 2g(1) \alpha_{0,1}(s) =$$

$$\sum_{n \geq 0} g(n) + 3 \sum_{n \geq 1} g(n-1) + \sum_{n \geq 1} g(n-1) \alpha_{0,n-1}(s)$$

or $\sum_{n \geq 0} g(n) = 5$ d'où :

$$(13) \quad (8+s) X_0(s) = 12 \alpha_{0,1}(s) + 8 \alpha_{0,0}(s) + 20$$

$\alpha_{0,0}$ et $\alpha_{0,1}$ sont donnés à l'aide des équations (6) :

$$(14) \quad \alpha_{0,0}(s) = \frac{1}{1+s} = 1 - s + 0(s)$$

$$(15) \quad \alpha_{0,1}(s) = \frac{2,5 + 0,5 \alpha_{0,0}}{3+s} = 1 - 0,5s + 0(s)$$

d'où, à l'aide de (13) :

$$(16) \quad X_0(s) = 5 - \frac{19}{8} s + 0(s)$$

A3 Calcul de X_1

La relation (6) donne :

$$[1+\mu+v(n)+s] \alpha_{1,n}(s) = 1 + \frac{3}{4} v(n) + \mu \alpha_{0,n+1}(s) + \frac{1}{4} v(n) \alpha_{1,n-1}(s)$$

En multipliant par $g(n)$, et en sommant sur n , il vient :

$$(1+\mu+8+s) X_1(s) - 8g(1) \alpha_{1,1}(s) - 8g(0) \alpha_{1,0}(s) + 2\alpha_{1,1}(s) g(1) =$$

$$\sum_{n \geq 0} g(n) + 3 \sum_{n \geq 1} g(n-1) + \mu \sum_{n \geq 1} \alpha_{0,n}(s) g(n) \frac{v(n)}{4} + \sum_{n \geq 1} \alpha_{1,n-1} g(n-1)$$

d'où :

$$(17) \quad (8+\mu+s) X_1(s) = 12 \alpha_{1,1}(s) + 8 \alpha_{1,0}(s) + 20 + 2\mu X_0 - 3\mu \alpha_{0,1}(s) - 2\mu \alpha_{0,0}(s) .$$

Calculons $\alpha_{1,0}$:

$$(1+\mu+s) \alpha_{1,0}(s) = 1 + \mu \alpha_{0,1}(s) = 1 + \mu - 0,5\mu s + 0(s)$$

$$(18) \quad \text{d'où} \quad \alpha_{1,0}(s) = 1 - \frac{1+0,5\mu}{1+\mu} s + 0(s)$$

Pour obtenir $\alpha_{1,1}$, il faut d'abord déterminer $\alpha_{0,2}$:

$$(1+8+s)\alpha_{0,2}(s) = 7 + 2\alpha_{0,1}(s) = 9 - s + 0(s)$$

$$(19) \quad \alpha_{0,2}(s) = 1 - \frac{2}{9} s + 0(s)$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad (1+\mu+2+s)\alpha_{1,1}(s) &= 2,5 + \mu \alpha_{0,2}(s) + 0,5\alpha_{1,0}(s) \\ &= 3 + \mu - \left(\frac{2}{9}\mu + 0,5 \frac{1+0,5\mu}{1+\mu}\right) s + 0(s) \end{aligned}$$

$$(20) \quad \text{et} \quad \alpha_{1,1}(s) = 1 - \frac{1}{3+\mu} \left[1 + \frac{2}{9}\mu + 0,5 \frac{1+0,5\mu}{1+\mu} \right] s + 0(s)$$

d'où finalement :

$$(21) \quad X_1(s) = 5 - us + 0(s)$$

$$\text{avec} \quad u = \frac{1}{8+\mu} \left[5 + \frac{5}{4}\mu + 8 \frac{1+0,5\mu}{1+\mu} + \frac{12}{3+\mu} \left(1 + \frac{2}{9}\mu + 0,5 \frac{1+0,5\mu}{1+\mu} \right) \right]$$

A4 Calcul du reste

On obtient, après multiplication de (6) par $g(n)$ et sommation sur n :

$$\begin{aligned} (15+s)X_m(s) - 8\alpha_{m,1} g(1) - 8\alpha_{m,0} g(0) + 2\alpha_{m,1} g(1) = \\ 5 + 3 \times 5 + 6 \sum_{n \geq 0} \alpha_{m-1,n+1} g(n+1) \frac{v(n+1)}{4} + \sum_{n \geq 1} \alpha_{m,n-1} g(n-1) \end{aligned}$$

Soit :

$$(14+s)X_m(s) = 12\alpha_{m,1} + 8\alpha_{m,0} + 20 + 12X_{m-1} - 12\alpha_{m-1,1} g(1) + 3\alpha_{m-1,1} g(1) - 12\alpha_{m-1,0} g(0)$$

d'où :

$$(22) \quad (14+s)X_m(s) = 12\alpha_{m,1} - 18\alpha_{m-1,1} + 8\alpha_{m,0} - 12\alpha_{m-1,0} + 20 + 12X_{m-1}$$

En multipliant (22) par $\frac{4}{\mu} \left(\frac{2}{3}\right)^{m-1}$, et en sommant sur $m \geq 2$, on obtient :

$$(14+s) \sum_{m \geq 2} f(m) X_m(s) = -\frac{48}{\mu} \alpha_{1,1}(s) - \frac{32}{\mu} \alpha_{1,0}(s) + \frac{80}{\mu} + 8 \sum_{m \geq 1} f(m) X_m$$

d'où :

$$\begin{aligned} (6+s) \sum_{m \geq 2} f(m) X_m(s) &= -\frac{48}{\mu} \alpha_{1,1}(s) - \frac{32}{\mu} \alpha_{1,0}(s) + \frac{160}{\mu} + 8 f(1) X_1(s) \\ &= \frac{4}{\mu} (-12 \alpha_{1,1}(s) - 8 \alpha_{1,0}(s) + 40 + 8 X_1(s)) \\ &= \frac{4}{\mu} \left[60 - \left(5 + \frac{5}{4} \mu - \mu u\right) s \right] + 0(s) \end{aligned}$$

(u défini en 2.1)

d'où finalement :

$$(23) \quad \sum_{m \geq 2} f(m) X_m(s) = \frac{2}{3\mu} \left[60 - \left(15 + \frac{5}{4} \mu - \mu u\right) s \right] + 0(s) .$$

A5 Regroupement

$$\text{On a : } \hat{A}(s) = K \left[X_0(s) + f(1) X_1(s) + \sum_{m \geq 2} f(m) X_m(s) \right]$$

$$\text{d'où } \hat{A}(s) = 1 - K \left(\frac{77}{24} + \frac{2}{\mu} (2u+5) - \frac{2u}{3} \right) s + 0(s)$$

A6 C.C.V. des interentrées

On obtient :

$$\hat{a}(s) = 1 - \frac{s}{4} \hat{A}(s) = 1 - \frac{s}{4} + \frac{K}{4} \left[\frac{77}{24} + \frac{2}{\mu} (2u+5) - \frac{2u}{3} \right] s^2 + 0(s) .$$

or $\hat{a}(s) = 1 - m_1 s + \frac{m_2}{2} s^2 + 0(s^2)$ où m_1 et m_2 sont les premiers moments de l'intervalle d'interentrées.

D'où on obtient, pour les interentrées :

. moyenne : 0,25

$$\text{. C.C.V. : } K_a = 8K \left[\frac{77}{24} + \frac{2}{\mu} (u+5) - \frac{u}{3} \right] - 1$$

$$\text{avec } K = \frac{\mu}{5(\mu+12)} \quad \text{et } u = \frac{2}{8+\mu} \left[5 + \frac{5}{4} \mu + 8 \frac{1+0,5\mu}{1+\mu} + \frac{12}{3+\mu} \left(1 + \frac{2}{9} \mu + 0,5 \frac{1+0,5\mu}{1+\mu} \right) \right]$$

B - ETUDE DES INTERSORTIES

B1 Décomposition

$$\hat{B}(s) = K \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} \beta_{m,n}(s) f(m) g(n)$$

$$(26) \quad \hat{B}(s) = K \left(\underbrace{\sum_{n \geq 0} \beta_{0,n}(s) g(n)}_{Y_0(s)} + f(1) \underbrace{\sum_{n \geq 0} \beta_{1,n}(s) g(n)}_{Y_1(s)} + \underbrace{\sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 2} \beta_{m,n}(s) f(m) g(n)}_{Y(s)} \right)$$

B2 Calcul du reste Y(s)

$$\text{Ici, si } m \geq 2, \beta_{m,n}(s) = \frac{6}{6+s}$$

$$\text{d'où } Y(s) = \frac{6}{6+s} \sum_{n \geq 0} \sum_{m \geq 2} f(m) g(n) = \frac{6}{6+s} \times \frac{8}{\mu} \times 5 = \frac{40}{\mu} \left(1 - \frac{s}{6} + 0(s) \right)$$

B3 Calcul de Y₁(s)

La relation (7) permet d'établir :

$$(1+\mu+8+s)Y_1(s) - 8g(1)\beta_{1,1}(s) - 8g(0)\beta_{1,0}(s) + 2g(1)\beta_{1,1}(s) = \frac{6}{6+s} \times 4 \times 5 + \mu \times 5 + Y_1(s)$$

$$(27) \quad \text{d'où : } (8+\mu+s)Y_1(s) = 5 \left(\frac{4 \times 6}{6+s} + \mu \right) + 12\beta_{1,1}(s) + 8\beta_{1,0}(s)$$

- Calcul de $\beta_{1,0}(s)$:

$$(1+\mu+s)\beta_{1,0}(s) = \beta_{2,0}(s) + \mu = \frac{6}{6+s} + \mu$$

$$(28) \quad \text{d'où : } \beta_{1,0}(s) = 1 - \frac{1}{1+\mu} \frac{7}{6} s + 0(s)$$

- Calcul de $\beta_{1,1}(s)$:

$$(1+\mu+2+s)\beta_{1,1}(s) = \frac{6}{6+s} + \mu + 1,5 \frac{6}{6+s} + 0,5\beta_{1,0}(s)$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'où } \beta_{1,1}(s) &= 1 - \frac{1}{12(3+\mu)} \left(17 + \frac{1}{1+\mu} \right) s + 0(s) \\
 &= 1 - \frac{1}{12} v s + 0(s) \quad \text{avec } v = \frac{1}{3+\mu} \left(17 + \frac{7}{1+\mu} \right)
 \end{aligned}$$

On obtient alors Y_1 :

$$\begin{aligned}
 (29) \quad Y_1(s) &= 5 - \frac{1}{8+\mu} \left[\frac{25}{3} + \frac{1}{3+\mu} \left(17 + \frac{7}{1+\mu} \right) + \frac{28}{3(1+\mu)} \right] s + 0(s) \\
 &= 5 - \frac{w}{8+\mu} s + 0(s) \quad \text{avec } w = \frac{25}{3} + v + \frac{28}{3(1+\mu)}
 \end{aligned}$$

B4 Calcul de $Y_0(s)$

De façon analogue, on obtient successivement :

$$(1+8+s)Y_0(s) - 16\beta_{0,1}(s) - 8\beta_{0,0}(s) + 4\beta_{0,1}(s) = Y_1 + 3Y_1 + Y_0$$

$$(30) \quad (8+s)Y_0(s) = 4Y_1 + 12\beta_{0,1}(s) + 8\beta_{0,0}(s)$$

$$(1+s)\beta_{0,0}(s) = \beta_{1,0}(s) \quad \text{d'où } \beta_{0,0}(s) = 1 - \left(\frac{1}{1+\mu} \frac{7}{6} + 1 \right) s + 0(s)$$

$$(1+2+s)\beta_{0,1}(s) = \beta_{1,1}(s) + 1,5\beta_{1,0}(s) + 0,5\beta_{0,0}(s)$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{0,1}(s) &= 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2} + \frac{7}{3(1+\mu)} + \frac{1}{12(3+\mu)} \left(17 + \frac{7}{1+\mu} \right) \right] s + 0(s) \\
 &= 1 - \frac{s}{3} \left(1,5 + \frac{1}{12} v + \frac{1}{3(1+\mu)} \right) + 0(s)
 \end{aligned}$$

$$Y_0(s) = 5 - \frac{1}{8} \left[19 + \frac{56}{3(1+\mu)} + \frac{1}{3} v + \frac{4}{8+\mu} w \right] s + 0(s)$$

B5 Calcul de $\hat{B}(s)$

En regroupant, on obtient :

$$\hat{B}(s) = K(Y_0(s) + \frac{4}{\mu} Y_1(s) + Y(s))$$

$$\hat{B}(s) = 1 - K \left(\frac{19}{8} + \frac{7}{3(1+\mu)} + \frac{1}{24} v + \frac{w}{8+\mu} \left(0,5 + \frac{4}{\mu} \right) + \frac{20}{3\mu} \right) s + 0(s)$$

B6 Coefficient de variation des intersorties

On obtient, pour les intersorties, par la même méthode qu'en A6 :

• moyenne : 0,25

• C.C.V. :

$$K_b = 8K \left[\frac{19}{8} + \frac{7}{3(1+\mu)} + \frac{1}{24} v + \frac{w}{8+\mu} \left(0,5 + \frac{4}{\mu} \right) + \frac{20}{3\mu} \right] - 1$$

avec (rappel) :

$$\begin{cases} K^{-1} = 5 \left(1 + \frac{12}{\mu} \right) \\ v = \frac{1}{3+\mu} \left(17 + \frac{7}{1+\mu} \right) \\ w = \frac{25}{3} + v + \frac{28}{3(1+\mu)} \end{cases}$$

C - CONCLUSION

Si $\mu = 6$, c'est à dire si le coefficient $\mu(m)$ de la station 1 est constant, on obtient : $K_a = K_b = 1,6$

Par contre, en général ($\mu \neq 6$), on a $K_a \neq K_b$; par exemple si $\mu = 3$:

$$K_a = 1,436\,767\,7 \quad (= \frac{6031 \times 8}{2 \times 6 \times 66 \times 25} - 1)$$

$$K_b = 1,435\,000\,0 \quad (= \frac{487 \times 8}{64 \times 25} - 1)$$

Ce qui montre que les interentrées et intersorties n'ont pas même distribution.

REFERENCES

- [BCMP] F. BASKETT, K.M. CHANDY, R.R. MUNTZ and F.G. PALACIOS, *Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers*, J.A.C.M. vol 22, n° 2, 248-260, 1975.
- [Gep] GELENBE et PUJOLLE, *Introduction aux réseaux de files d'attente*, Eyrolles, 1982.
- [Jac] J.R. JACKSON, *Jobshop-like queue system*, Management Sci., vol 10, 131-142, 1963.
- [LPS] J. LABETOULLE, G. PUJOLLE and C. SOULA, *Stationary distributions of flows in Jackson networks*, Mathematics of operations research, vol 6, N° 2, may 1981.
- [Len] LE NY, *Etude analytique de réseaux de files d'attente multi-classes à routages variables*, RAIRO, vol 14, n° 4, 331-347, 1980.
- [Pel] J. PELLAUMAIL, *Formule du produit et décomposition de réseaux de files d'attente*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol 15, n° 3, 261-286, 1979.
- [Pit] B. PITTEL, *Closed exponential networks of queues with blocking*, I.B.M. Research report, RC. 7174, 1983.
- [Wal] J. WALRAND, *Filtering formulas and the ./M/1 queue in a quasi reversible network*, preprint, 1983.

- PI 208 Problèmes d'implémentation du langage Prolog en vue de la réalisation d'une machine Prolog
Yves BEKKERS, Bernard CANET, Olivier RIDOUX, Lucien UNGARO
Octobre 1983, 63 pages.
- PI 209 La technique du suivi de contour en synthèse d'images et ses applications
Gérard HEGRON, Octobre 1983
- PI 210 A new characterization of infinitary rational languages
Philippe DARONDEAU, Laurent KOTT
Octobre 1983, 9 pages.
- PI 211 On the observational semantics of fair parallelism
Philippe DARONDEAU, Laurent KOTT
Octobre 1983, 40 pages.
- PI 212 Solution à forme produit d'un système linéaire
J. PELLAUMAIL
Novembre 1983, 36 pages.
- PI 213 Equations de Chapman-Kolmogorov et flots stationnaires pour des processus markoviens
J.Y. LE BOUDEC et J. PELLAUMAIL
Novembre 1983, 18 pages.
- PI 214 Distribution des interentrées et intersorties pour des réseaux à forme produit
J.Y. LE BOUDEC
Novembre 1983, 39 pages.

